В.П. МАЛЫШЕВ, А.М. ТУРДУКОЖАЕВА

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ФОРМУЛЫ СОЧЕТАНИЙ

(Представлена член-корр. НАН РК Толымбековым М.Ж.)

Аннотация

Авторами на основе анализа формулы сочетаний C_n^r по максимальному значению и нормировки по этому значению получено унифицированное и более универсальное выражение с единым максимумом, равным единице, и возможностью использования как целых, так и полуцелых значений *r*, при которых достигается максимум соответственно как для четных, так и нечетных *n*. Подобное выражение может быть использовано как для определения абсолютных максимальных значений C_n^r для нечетных *n* при полуцелых *r*, так и в качестве симметричных распределений новой функции y_n^r с вариацией *r* от нуля до *n*.

Ключевые слова: формула сочетаний, четные, нечетные, значения.

Тірек сөздер: үйлесімдік формулалар, жұп сан, тақ сандар, мағына.

Keywords: formula of combinations, even, odd number, values.

Введение

Широко известная и применяемая в задачах комбинаторики формула сочетаний C_n^r отличается симметричными значениями этой дискретной функции при вариации *r* от 0 до *n*, что послужило для разработки треугольников Паскаля и биномиальных коэффициентов. При этом для четных *n* получается одно наибольшее значение C_n^r, а для нечетных – два. Если рассматривать множество C_n^r как непрерывное распределение C_n^r по *r*, то из свойств симметрии этого множества следует необходимость единственного максимального значения C_n^r при определенном значении *r*. Это можно обосновать следующим образом.

В области наибольших значений смежные величины этой дискретной функции должны удовлетворять условию

$$C_n^r = C_n^{r+1}. \qquad (1)$$

Из соответствующего равенства

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} \tag{2}$$

следует

$$r=\frac{n-1}{2}. \tag{3}$$

При этом целое значение r будет относиться только к нечетным n, а нечетным должно соответствовать дробное значение r, которое неприемлемо ни для формулы сочетаний, ни для более широкой области определения биномиальных коэффициентов. Однако нечетным n соответствуют два наибольших значения C_n^r, которые получаются при двух смежных r, между тем как по (3) находится только при одном.

Это связано с некоторой произвольностью записи условия (1), которое допускает альтернативное выражение

$$C_n^r=C_n^{r-1}. \tag{4}$$

с соответствующим раскрытием его как

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} \tag{5}$$

и получением второго значения r, в отличие от r_1 (3):

$$r_2=\frac{n+1}{2} \tag{6}$$

с теми же свойствами, что и r_1. По-видимому, более правильная запись условия равенства смежных значений дискретной функции выразится как

$$C_n^r=C_n^{r\pm 1}. \tag{7}$$

В то же время найденные выражения r_1 и r_2 позволяют проанализировать функцию C_n^r как непрерывную с целью определения ее аналитически максимального (а не наибольшего) значения как для четных, так и не для нечетных n.

Так, при $n\to\infty$ пределами r_1 и r_2 становится равенство

$$r_1=r_2=n/2, \tag{8}$$

что означает совпадение условий достижения наибольших значений C_n^r для четных и нечетных n

$$\left(C_n^r\right)_{\max}=C_n^{n/2}. \tag{9}$$

Этим дополнительно подчеркивается симметричность функции C_n^r, а тем самым положение и величина максимума для любых $n \geq 0$.При четных n величина максимума определяется непосредственно, а при нечетных n по условию (9) максимум может быть рассчитан с помощью гамма-функции в соответствии с общим выражением

$$\left(C_n^r\right)_{\max} = \frac{n!}{(n/2)!(n/2)!}. \tag{10}$$

Его можно использовать для нормировки функции C_n^r с целью унификации распределения по r с единым максимумом, равным единице, для чего вводим нормированную функцию сочетаний:

$$y_n^r = C_n^r \Big/ \left(C_n^r\right)_{\max} = \frac{(n/2)!(n/2)!}{r!(n-r)!}. \tag{11}$$

В этом случае положение максимума определено при любом n, четном или нечетном, так как он всегда равен единице. Что касается остальных значений y_n^r, то для нечетных n они должны соответствовать некоторым промежуточными между смежными распределениями для четных n.

На рисунке 1 изображены распределения для смежных четных n = 6, 8, 10.

Точки максимума располагаются при $n/2$ = 3, 4, 5, строго подчиняясь линейной интерполяции. Очевидно, такие же точки максимума для нечетных n = 7, 9 будут располагаться при $n/2$ = 3,5; 4,5, подчиняясь строгой линейной интерполяции между смежными максимумами для распределений с четными n. Близость к линейной интерполяции обнаруживают значения y_n^r по возрастанию r для трех смежных распределений с четными n. Это позволяет распространить подобный характер интерполяции на распределения с нечетными n, тем более что интервал интерполяции оказывается вдвое ỳже, а среднее значение y_n^r строго относится к среднему дробному значению r, промежуточному между последовательными четными r.

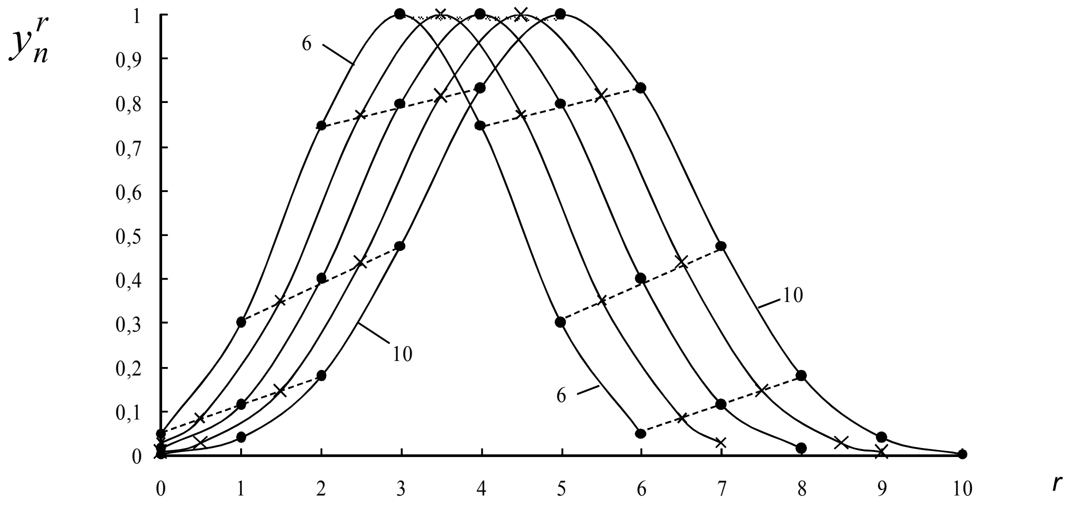

Рисунок 1 – Распределение y_n^r по r для n 6, 7, 8 ,9, 10.

Точки – расчетные величины по (11) для четных n, крестики – линейно интерполированные для нечетных n

Следует отметить, что линейный характер интерполяции значений y_n^r не соблюдается, если ее проводить не при смежных значениях r, а при одинаковых, что вполне наглядно иллюстрируется рисунком для трех распределений при четных n.

Построение распределения y_n^r для нечетных n 5 и 7 представлено на том же рисунке, а расчетные значения приведены в таблице 1.

Формула интерполяции:

$$y_n^r = \frac{1}{2}\left(y_{n-1}^{r-0,5} + y_{n+1}^{r+0,5}\right), \tag{12}$$

где n – нечетное целое, r – полуцелое число в интервале $0,5 \le r \le (n - 0,5)$.

Таблица 1 – Распределение y_n^r для n 6, 7, 8, 9, 10

r	y_6^r	y_7^r	y_8^r	y_9^r	y_{10}^r
0	0,05	(0,0273)	0,0143	(0,0076)	0,0040
0,5	–	0,082	–	0,0272	–
1	0,30	–	0,114	–	0,040
1,5	–	0,35	–	0,147	–
2	0,75	–	0,4	–	0,179
2,5	–	0,775	–	0,438	–
3	1	–	0,8	–	0,476
3,5	–	1	–	0,8165	–
4	0,75	–	1	–	0,833
4,5	–	0,775	–	1	–
5	0,30	–	0,8	–	1
5,5	–	0,35	–	0,8165	–

6	0,05	–	0,4	–	0,833
6,5	–	0,082	–	0,438	–
7	–	(0,0273)	0,114	–	0,476
7,5	–	–	–	0,147	–
8	–	–	0,0143	–	0,179
8,5	–	–	–	0,0272	–
9	–	–	–	(0,0076)	0,040
9,5	–	–	–	–	–
10	–	–	–	–	0,0040

Что касается концевых значений y_n^r для нечетных n (при r, равном нулю и r, для которых смежных по r y_n^r с четными n не хватает), то они могут быть вычислены через абсолютные значения C_n^r для нечетных n с помощью обращенной формулы (11) и по (9):

$$y_n^0 = y_n^n = C_n^0 \big/ C_n^{n/2} = 1 \big/ C_n^{n/2}\,, \tag{13}$$

а для определения $C_n^{n/2} = \left(C_n^r\right)_{\max}$, представляющего самостоятельный интерес, достаточно воспользоваться графически интерполированными для целых r данными y_n^r для нечетных n на основе той же формулы (11)

$$C_n^{n/2} = C_n^r \big/ y_n^r\,. \tag{14}$$

Так, для r = 2 при n = 7 графически находим y_7^1 = 0,575, и тогда при C_7^2 = 21 получаем значение $C_7^{3,5}$ = 21/0,575 = 36,5. Для r = 3 точно так же находим y_7^3 = 0,95 и для C_7^3 = 35 получается $C_7^{3,5}$ = 35/0,95 = 36,8. Среднее значение $C_7^{3,5}$= 36,65 ± 0,15, что дает относительную ошибку 0,4 %. Само же максимальное значение закономерно располагается между абсолютными максимумами $C_n^{n/2}$ для n = 6 и n = 8, соответственно равными 20 и 70.

С помощью найденного максимального значения $C_7^{3,5}$ определяем по (13) концевые величины $y_7^0 = y_n^n$, равными 0,0273.

Повторение процедур y_9^r для при r = 2, 3, 4 дает по графически определенным значениям y_9^2 = 0,28, y_9^3 = 0,625 и y_9^4 = 0,96 и вычисленным C_9^2 = 36, C_9^3 = 84 и C_9^4 = 126 соответствующие величины $\left(C_9^r\right)_{\max} = C_9^{4,5}$ 128,6; 134,4; 131,3 со средней величиной

131,4 ± 2,37 при относительной погрешности 1,8 %. При этом найденный максимум C_9^r располагается между $\left(C_8^r\right)_{\max}$ = 70 и $\left(C_{10}^r\right)_{\max}$ = 252.

Следует отметить, что с увеличением *n* надежность линейной экстраполяции y_n^r для нечетных *n* должна возрастать прежде всего потому, что концевые значения y_n^r согласно (13) для всех *n* стремятся к нулю при $n \to \infty$ и распределения, оставаясь симметричными, приобретают более унифицированную форму, варьируя от нуля до нуля с максимумом, равным единице. В этом отношении корректность функции y_n^r для нечетных *n* приближается к точности расчета гамма-функции по условию $n \to \infty$.

Таким образом, на основе формулы сочетаний в нормированном по максимуму виде y_n^r обоснована возможность ее использования для определения максимума сочетаний для любых целых неотрицательных значений *n* с единообразным графически сглаженным выражением y_n^r в качестве ее симметричного распределения по *r*, включая его полуцелые неотрицательные значения. В принципе, линейная интерполяция y_n^r может быть распространена на все действительные неотрицательные значения *n* и такие же *r* с получением непрерывного распределения y_n^r и C_n^r по *n* и *r*.

Такие распределения представляют непосредственный интерес для решения комбинаторных задач, таких как определение виртуальной заселенности узлов кристаллической решетки при непрерывном повышении температуры [1, 2] и многих других задач.

ЛИТЕРАТУРА

1 Малышев В.П., Турдукожаева А.М. Что твердого в твердом? // Энциклопедия инженера-химика. – 2011. – № 11. – С. 38-48.

2 V.P. Malyshev, A.M. Turdukozhayeva. What is a solid in solid? // Journal Materials Science and Engineering B. – 2012. V. 2. № 10. – P. 590-599.

REFERENCES

1 Malyshev V.P., Turdukozhaeva A.M. Chto tverdogo v tverdom? // Jenciklopedija inzhenera-himika. – 2011. – № 11. – S. 38-48.

2 V.P. Malyshev, A.M. Turdukozhayeva. What is a solid in solid? // Journal Materials Science and Engineering B. – 2012. V. 2. № 10. – R. 590a-599.

Малышев В.П., Тұрдықожаева А.М.

ҮЙЛЕСТІРУ ФОРМУЛАЛАРЫНЫҢ КЕЙБІР ҚАСИЕТТЕРІ ТУРАЛЫ

Авторлармен максималды мән және осы мәнді нормалау бойынша үйлестіру формулаларына C_n^r талдау жасау арқылы үйлестірілген, әрі бірге тең бір максимумды әмбебап (универсалды) өрнек алынды. Онда жұптық сияқты тақтық *n* үшін де сәйкесінше максимум болатын, бүтін сияқты, жартылай бүтін *r* мәндерін қолдану мүмкіндігі бар. Мұндай өрнекті жартылай бүтін *r*-да тақтық *n* үшін C_n^r абсолюттік максималды мәнді анықтау үшін, нөлден *n*-ға дейін вариациялау арқылы жаңа функцияларды симметриялық үлестіруге қолдануға болады.

Тірек сөздер: үйлесімдік формулалар, жұп сан, тақ сандар, мағына.

V.P. Malyshev, A.M. Turdukozhaeva

SOME PROPERTIES OF FORMULA COMBINATIONS

Summary

The authors on the basis of the analysis of formula combinations C_n^r on the maximum value and the normalization on the value obtained a unified and more universal expression of a single maximum, equal to one, and the ability to use both integer and half-integer values of *r*, for which the maximum is reached, respectively, for both even and odd *n*. Such expression can be used for determining the maximum absolute values C_n^r for n when odd half-integer *r*, and as a function y_n^r of the new symmetric distributions *r* varying from zero to *n*.

Keywords: formula of combinations, even, odd number, values.

Поступила 09.09.2013 г.